

به نام خدا



دانشکده علوم ریاضی

تاریخ امتحان: ۸۸/۱۰/۱۹
مدت امتحان: ۳ ساعت

امتحان پایان ترم معادلات دیفرانسیل

۲۲ - ۵۳۴

نیمسال اول ۸۸-۸۹

سؤال ۱. بنابر قضیه وجود و یگانگی می دانیم برای هر عدد حقیقی a ، مسأله مقدار اولیه زیر دارای جواب یگانه ای است که در سرتاسر \mathbb{R} تعریف شده است. به ازای چه مقادیری از a ، این جواب یگانه تابعی متناوب با دوره تناوب 2π است؟

$$\begin{cases} y' + y = \sin t \\ y(0) = a \end{cases}$$

سؤال ۲. فرض کنید $I \subseteq \mathbb{R}$ بازه ای باشد که شامل صفر است. آیا معادله دیفرانسیلی به صورت $y'' + a_1(t)y' + a_2(t)y = 0$ که در آن a_1 و a_2 توابعی پیوسته در I هستند وجود دارد با این ویژگی که $y_1(t) = t^5$ و $y_2(t) = t^5$ دو جواب برای آن باشند؟ چرا؟

سؤال ۳. بسط تیلور جواب یگانه مسأله مقدار اولیه زیر را حول نقطه $t = 0$ به دست آورید.

$$\begin{cases} y'' - t y = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

سؤال ۴. با استفاده از تبدیلات لاپلاس، جواب یگانه مسأله مقدار اولیه زیر را به دست آورید.

$$\begin{cases} y'' - 2y' + 5y = 2\delta(t-3) \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

سؤال ۵. دستگاه معادلات دیفرانسیل خطی ناهمگن زیر را در نظر بگیرید.

$$\begin{cases} x' = 2x \\ y' = -x + 2y + e^{2t} \\ z' = y + 2z \end{cases}$$

الف) دستگاه را به شکل ماتریسی، یعنی به صورت $X' = AX + f(t)$ که در آن ماتریس A و تابع برداری $f(t)$ را مشخص می کنید، بازنویسی کنید.

ب) سه جواب مستقل خطی برای دستگاه همگن متناظر، یعنی دستگاه $X' = AX$ ، را با استفاده از روش مقدار ویژه - بردار ویژه به دست آورید.

دانلود سوالات بیشتر به همراه پاسخنامه در سایت ریاضیات ایران بخش نمونه سوالات دانشگاهی

ج) یک ماتریس اساسی جواب برای دستگاه همگن متناظر، یعنی $X' = AX$ ، بنویسید.

د) e^{At} را محاسبه کنید.

ه) با استفاده از روش تغییر پارامترها، جواب یگانه دستگاه ناهمگن داده شده را که در شرایط $x(0) = 0$ ، $y(0) = 0$ و $z(0) = 1$ صدق می‌کند به دست آورید.

سؤال ۶. دستگاه معادلات دیفرانسیل غیرخطی زیر را در نظر بگیرید.

$$\begin{cases} x' = -2x + 2x^2 \\ y' = -3x + y + 3x^2 \end{cases}$$

الف) نقاط بحرانی دستگاه را به دست آورید.

ب) وضعیت هر نقطه بحرانی را، از نظر پایداری، پایداری مجانبی یا ناپایداری، بررسی کنید و نمای فاز دستگاه را در همسایگی هر نقطه بحرانی رسم کنید.

توزیع نمره. سؤال‌های ۱، ۲، ۳ و ۴: هر کدام ۱۰ نمره، سؤال ۵: $5 + 15 + 10 + 10 = 40$ نمره، سؤال ۶: $5 + 10 = 15$ نمره.

مجموع: ۱۰۰ نمره

پاسخنامه این سوال در سایت ریاضیات ایران موجود است

جهت دانلود به بخش نمونه سوالات دانشگاهی، نمونه سوالات معادلات دیفرانسیل مراجعه نمایید