



# دانلود سوالات بیشتر از سایت ریاضیات ایران

امتحان پایان ترم درس آنالیز ریاضی ۱      وقت امتحان: ۳ ساعت      ۹۴/۳/۱۶

۱. اگر  $a_n > 0$  نشان دهید  $\sum a_n$  همگرا است اگر و تنها اگر  $\prod(1 + a_n)$  همگرا باشد.

۲. فاصله هر نقطه  $p$  از فضای متریک  $M$  تا زیرمجموعه  $S$  از آن به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\text{dist}(p, S) = \inf\{d(p, x) : x \in S\}$$

الف- نشان دهید  $p$  یک نقطه حدی  $S$  است اگر و تنها اگر  $\text{dist}(p, S) = 0$ .

ب- ثابت کنید تابع  $p \mapsto \text{dist}(p, S)$  پیوسته یکنواخت است.

۳. نشان دهید اگر تابعی ریمان انتگرالپذیر باشد، نقاط ناپیوستگی آن اندازه صفر است.

۴. شرایط جابجایی حد و مشتق را در دنباله‌ها به طور دقیق بیان کرده و اثبات نمایید. با یک مثال نشان دهید در حالت کلی ممکن است حد یکنواخت توابع مشتق‌پذیر، مشتق‌پذیر نباشد.

۵. فرض کنید  $f(x)$  یک تابع مشتق‌پذیر روی  $[0, 1]$  باشد که  $|f'(x)| \leq M$  برای هر  $x$ ، ثابت کنید

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) - \int_0^1 f(x) dx \right| \leq \frac{M}{2n}$$

۶. الف-  $f_n$  و  $f$  توابعی از  $\mathbb{R}$  به  $\mathbb{R}$  هستند که برای هر دنباله همگرای  $x_n \rightarrow x$  داریم:  $f_n(x_n) \rightarrow f(x)$ . ثابت کنید  $f$  پیوسته است.

ب- اگر  $f_n$ ها پیوسته بوده و  $f_n \rightarrow f$  به طور یکنواخت، آنگاه شرط قسمت (الف) برقرار است.

۷. فرض کنید  $\{a_n\}$  یک دنباله دلخواه از اعداد حقیقی ناصفر باشد، ثابت کنید دنباله توابع زیر یک زیردنباله همگرا نقطه‌وار به یک تابع پیوسته روی  $\mathbb{R}$  دارد.



$$f_n(x) = \frac{1}{a_n} \sin(a_n x) + \cos(x + a_n)$$

موفق باشید.

<http://irmath.com>

کانال تلگرام @irmath