



در مسایل زیر V یک فضای برداری متناهی البعد روی یک میدان F است.

- ۱ الف) همه ترابره های $\tau \in \text{SL}(V)$ را بیابید به طوری که τ^2 همانی باشد (راهنمایی حالت هایی که مشخصه F برابر با ۲ باشد یا نباشد را جداگانه بررسی کنید).
- ب) فرض کنید F یک میدان متناهی q باشد. نشان دهید مرتبه دو گروه $\text{PGL}(V)$ و $\text{SL}(V)$ یکسان است، اما این دو گروه یکرخت نیستند.
- ج) یک شرط لازم و کافی برای اینکه یک تبدیل خطی وارون پذیر φ با یک ترابر غیر همانی $\tau \in \text{SL}(V)$ جابجا شود را بیابید.
- د) یک گروه ساده هم مرتبه با گروه A_8 اما غیر یکرخت با آن مثال بزنید.

۲ فرض کنید (V, ω) یک فضای سیمپلکتیک از بعد $2n$ روی یک میدان متناهی q عضوی F باشد.

- الف) تعداد زوج های هذلولوی در V را بیابید.
- ب) یک فرمول بازگشتی برای محاسبه مرتبه گروه $\text{SP}(V)$ بیابید.
- ج) تعداد ترابره های سیمپلکتیک روی V را محاسبه نمایید.
- د) تعداد ترابره های معمولی V را محاسبه کنید.

۳ فرض کنید $b : V \times V \rightarrow F$ یک فرم دوخطی ناتبگون و متقارن و مشخصه F مخالف ۲ باشد. اگر تبدیل خطی وارون پذیر $f : V \rightarrow V$ تعامد را حفظ کند آنگاه اسکالر c هست بطوریکه $b(f(x), f(y)) = cb(x, y)$ برای x و y در V .

۴ فرض کنید $b : V \times V \rightarrow F$ یک فرم دوخطی ناتبگون بازتابی باشد. نشان دهید بعد یک زیرفضای تماما ایزوتروپ W از V کمتر یا مساوی $\frac{1}{2} \dim V$ است.

۵ برای بردار ثابت ناصفر x_0 نشان دهید مجموعه ترابره های به صورت τ_{f, x_0} که $f \in V^*$ و $x_0 \in \ker f$ یک زیر گروه آبدی از $\text{SL}(V)$ تشکیل می دهند. اگر $\dim V = n$ و $|F| = q$ مرتبه این زیرگروه را محاسبه نمایید.

موفق باشید