



- ۱ فرض کنید (V, b) یک فضای دوخطی متقارن و آنیزوتروپ از بعد ۲ روی یک میدان F از مشخصه مخالف ۲ باشد.
الف) نشان دهید می توان یک تابع همانند تابع کسینوس متعارف از $SO(V)$ به F تعریف کرد. چند خاصیت معمول این تابع کسینوس را بیان کنید.
ب) برای $\rho \in SO(V)$ ، درستی تساوی $\cos(\rho^n) = 2 \cos(\rho) \cos(\rho^{n-1}) - \cos(\rho^{n-2})$ را بررسی کنید.
- ۲ از قسمتهای این سوال فقط به یک مورد پاسخ دهید:
الف) نشان دهید $SO(\mathbb{Q}^3)$ گروه ساده نیست.
ب) نشان دهید $\frac{SO(2,2)}{\{\pm id\}}$ گروه ساده نیست.
- ۳ فرض کنید (V, b) یک فضای دوخطی متقارن روی یک میدان F از مشخصه مخالف ۲ باشد. اگر $\dim V$ زوج باشد و $\sigma \in O(V) \setminus SO(V)$ آنگاه نشان دهید σ یک نقطه ثابت ناصفر دارد. با ذکر یک مثال نشان دهید اگر $\sigma \in SO(V)$ این حکم معتبر نیست.
- ۴ الف) فرض کنید τ_1 و τ_2 دو ترابر سیمپلکتیک در $SP(V)$ باشند و بردار $u \in V$ موجود باشد بطوریکه
$$\tau_1(u) = \tau_2(u) \neq u.$$

نشان دهید $\tau_1 = \tau_2$.
ب) آیا حکم قسمت قبل برای ترابرهایی معمولی در $SL(V)$ هم معتبر است؟
- ۵ فرض کنید F یک میدان متناهی q عضوی از مشخصه مخالف دو و (V, b) یک فضای دوخطی متقارن روی F از بعد ۳ با ماتریس گرام همانی باشد.
الف) تعداد انعکاسها در $O(V)$ را بیابید.
ب) تعداد برگردانها در $O(V)$ را بیابید.

موفق باشید