



در مسائل زیر همه جا V یک فضای برداری متناهی البعد روی یک میدان F از مشخصه مخالف ۲،
 $b : V \times V \rightarrow F$ یک فرم دوخطی متقارن و ناتبگون و $q : V \rightarrow F$ فرم مربعی متناظر با آن است. انعکاس
در امتداد بردار آنیزوتروپ $u \in V$ را با τ_u نمایش می دهیم.

۱ الف) دو فرم دوخطی متقارن و ناتبگون $b_1, b_2 : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ مثال بزنید که آنها را نتوان بطور همزمان قطری
کرد.

ب) در حد ایزومورفیسم چند فرم دوخطی متقارن و ناتبگون روی $\mathbb{R}^3$ وجود دارد؟

ج) اگر گروه متعامد فرمهای قسمت قبل را در نظر گیریم چند گروه دودو غیر ایزومورف بدست می آید؟

۲ الف) تعریف اندیس ویت (V, b) را نوشته و خوشتعریفی آن را ثابت کنید.

ب) نشان دهید اندیس ویت (V, b) کمتر یا مساوی $\frac{1}{2} \dim V$ است.

۳ فرض کنید $\dim V = n$ و $\sigma \in O(V, b)$.

الف) اگر σ حاصلضرب حداکثر r انعکاس باشد آنگاه نشان دهید $\dim \text{Fix}(\sigma) \geq n - r$.

ب) اگر $\text{Fix}(\sigma)$ ناتبگون باشد نشان دهید σ را می توان بصورت حاصلضرب دقیقاً $s = n - \dim \text{Fix}(\sigma)$
انعکاس (و نه کمتر) نوشت.

۴ روش پیدا کردن مرتبه گروه متعامد $O(V, b)$ در حالتی که میدان زمینه F یک میدان متناهی باشد را بطور خلاصه
تشریح کنید.

۵ الف) درستی این حکم را بررسی کنید: شرط لازم و کافی برای اینکه دو انعکاس τ_u و τ_v با همدیگر جابجا شوند
این است که یا u و v وابسته خطی باشند یا بر هم عمود باشند.

ب) فرض کنید $\{e_1, \dots, e_n\}$ یک پایه متعامد برای (V, b) باشد. نشان دهید $-\text{id} = \tau_{e_1} \cdots \tau_{e_n}$.

ج) نرم اسپینوری $-\text{id}$ را بدست آورید.

۶ (سوال اختیاری) نشان دهید هر عضو $O(V, b)$ را می توان بصورت حاصلضرب حداکثر دو برگردان نوشت.

موفق باشید